

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010**  
**Cls. a XI-a**

1. Să se rezolve ecuația:  $X^n = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X \in M_2(\mathbb{R})$ .

2. Fie  $A \in M_2(\mathbb{Z})$  astfel încât  $\det(A^2 + A + I_2) = \det^2(A + I_2)$ .

Să se arate că:  $\text{tr}A + \det A \in \{-8, 0\}$ . ( $\text{tr}A$ -urma matricei  $A$ )

Gheorghe Ghiță, Buzău

3. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\sqrt{n}}$ , unde

$$x_n = \frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_{n+1} = x_n - x_n^4$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_1 \in (0, 1)$ .

a) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și să se calculeze limita sa.

b) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4) = x_1$

c) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ .

[www.mategl.com](http://www.mategl.com)

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte